

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ**

Методические указания к практическим занятиям  
по курсу "Высшая математика"

СОСТАВИТЕЛИ: Егорова Ю.Б.  
Мамонов И.М.

**Москва 2019**

Геометрическое определение вероятности события: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов, М.: МАИ, 2019. - 8 с.

© Егорова Ю.Б.,  
Мамонов И.М.,  
составление, 2019

©МАИ, 2019

# 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Одним из недостатков классического определения вероятности, ограничивающим его применение, является то, что его нельзя применить к испытаниям с бесконечным числом исходов. По классической схеме испытания число возможных исходов испытания должно быть конечным. Этот недостаток можно преодолеть, если ввести понятие геометрического определения вероятности.

Рассмотрим **геометрическую схему испытания**: результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причем любые положения точек в этой области равновозможны. Геометрическая вероятность тогда определяется как вероятность попадания точки в некоторую область: одномерную (например, отрезок прямой, длина дуги и т.п.), двумерную (площадь некоторой фигуры) или трехмерную (объем некоторого тела в пространстве).

**Геометрической вероятностью** события  $A$  называется отношение меры (размера) области, благоприятствующей появлению события  $A$ , к мере (размеру) всей области:

$$P(A) = \frac{G_0}{G},$$

где  $G$  – размер (длина, площадь или объем) всей области,  $G_0$  – размер той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

**ПРИМЕР 1.** На отрезке длиной 40 см помещен отрезок длиной 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

**РЕШЕНИЕ.** Вероятность попадания точки на меньший отрезок пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно большого отрезка. Тогда:

$$P(A) = \frac{L_0}{L} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

**ПРИМЕР 2.** В квадрат вписан круг радиусом  $r$ . Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в квадрат, окажется внутри круга.

**РЕШЕНИЕ.** Площадь квадрата  $S=4r^2$ ; площадь круга  $S_0=\pi r^2$ . Тогда:

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{\pi}{4}.$$

**ПРИМЕР 3.** Два друга условились встретиться в определенном месте, договорившись только о том, что каждый является туда в любой момент времени между 11 и 12 ч. и ждет в течение 30 мин. Если один из них к этому времени еще не пришел или уже успел уйти, то встреча не состоится. Найти вероятность того, что встреча состоится.

**РЕШЕНИЕ.** Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат. Обозначим моменты прихода двух друзей через  $x$  и  $y$ . По условию:  $11 \leq x \leq 12, 11 \leq y \leq 12$  или  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  (если за начало отсчета взять 11 ч.). Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату  $OKLM$  со стороной, равной 1

(рис.1).

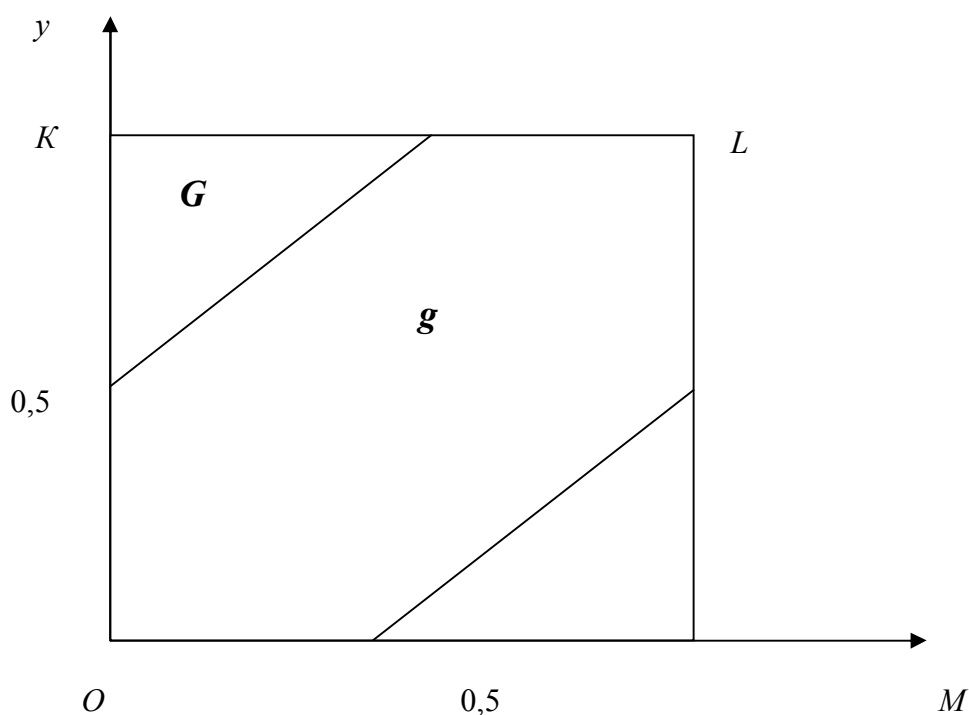


Рис. 1. Геометрическая схема встречи

Событие  $C$  – «встреча друзей состоится» – можно представить в виде точки, брошенной на квадрат  $OKLM$ . Оно произойдет, если разность между  $x$  и  $y$  не превзойдет 0,5 ч (по абсолютной величине), т.е.  $|x - y| \leq 0,5$  или  $x - 0,5 \leq y \leq x + 0,5$ . На рис. 1 этому неравенству соответствует полоса, обозначенная через  $g$ .

Площадь квадрата  $G$  равна  $S_G = 1,0$ . Площадь полосы  $g$  равна  $S_g = 1 - 2(1/2) \cdot 0,5^2 = 0,75$  или  $S_g = 1 - 0,5^2 = 0,75$ .

Тогда:

$$P(C) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{0,75}{1,0} = 0,75.$$

## 2. ЗАДАЧИ

1. На отрезке длиной 20 см помещен меньший отрезок длиной 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. *Отв.*  $1/2$ .
2. В течение промежутка времени от 11 ч. до 11ч. 30 мин. должен быть телефонный звонок. Какова вероятность того, что звонок последует в последние 10 мин. *Отв.*  $1/3$ .
3. Диск разделен на 12 секторов, попеременно окрашенных в черный, белый и синий цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность, что пуля попадет в один из белых секторов. *Отв.*  $1/3$ .
4. В круг радиусом  $R$  помещен меньший круг радиусом  $r$ . Найти вероятность того, что точка, поставленная наудачу в большой круг, попадет также и в малый круг. *Отв.*  $r^2/R^2$ .
5. На плоскости начерчены две концентрические окружности с одним центром и радиусами 5 см и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная на удачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное окружностями. *Отв.* 0,75.
6. Внутри круга радиусом  $R$  наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг:  
а) квадрата со стороной  $a$ ; б) равностороннего треугольника со стороной  $a$ . *Отв.* а)  $a^2/\pi R^2$ ; б)  $a^3/4\pi R^3$ .
7. Два студента договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в

течение  $\frac{1}{4}$  часа, после чего уходит. Найти вероятность, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке от 12 до 13 часов. *Отв.* 7/16.

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Сформулируйте классическое определение вероятности события. В чем состоит его недостаток?
2. Сформулируйте геометрическое определение вероятности события.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001. – 400 с.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Введение.....	3
1. Геометрическое определение вероятности события .....	3
2. Задачи .....	6
3. Контрольные вопросы.....	7
Литература.....	7

Юлия Борисовна Егорова  
Игорь Михайлович Мамонов

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Методические указания к практическим занятиям  
по курсу «Высшая математика»